Limiti, liminf e limsup all'inifinito

Definizioni

Definizione 1. *Siano Ω un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione a valori reali.*

(1) *Diciamo che il numero reale ℓ è il limite di F per $|X| \to +\infty$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell, \tag{1}$$

se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R > 0$ tale che*

  per ogni $X \in \Omega$ tale che $|X| > R$ si ha che $|F(X) - \ell| < \varepsilon$;

- *per ogni successione $X_n \in \Omega$ tale che $|X_n| \to +\infty$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell.$$

(2) *Diciamo che F tende a più infinito per $|X| \to +\infty$ e scriviamo*

$$\lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = +\infty, \tag{2}$$

se vale una delle seguenti proprietà equivalenti:

- *per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

  per ogni $X \in \Omega$ tale che $|X| > R$ si ha che $F(X) > M$.

- *per ogni successione $X_n \in \Omega$ tale che $|X_n| \to +\infty$ si ha*

$$\lim_{n\to\infty} F(X_n) = +\infty.$$

(3) *Definiamo il limite superiore di F*

$$\limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X)$$

come

$$\sup\Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \ : \ \textit{esiste una successione } \ X_n \in \Omega,\ |X_n| \to +\infty, \ \ \textit{tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

(4) *Definiamo il limite inferiore di F*

$$\liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X)$$

come

$$\inf\Big\{\ell \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \ : \ \textit{esiste una successione } \ X_n \in \Omega,\ |X_n| \to +\infty, \ \ \textit{tale che } \ \lim_{n\to\infty} F(X_n) = \ell\Big\}.$$

Proposizione 2. *Siano Ω un insieme illimitato in $\mathbb{R}^d$ ed $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione data. Dato $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, sono equivalenti:*

(i) $\displaystyle\liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell \quad$ *e* $\quad \displaystyle\limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$;

(ii) $\displaystyle\lim_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$.

Calcolo di limsup e liminf in coordinate polari e sferiche

Proposizione 3. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme illimitato ed* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Dato* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, sono equivaleni:*

(i) $\displaystyle \limsup_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$;

(ii) $\displaystyle \limsup_{R \to +\infty} \Big\{ \sup_{\Omega \cap \partial B_R} F \Big\} = \ell$.

Proposizione 4. *Siano* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un insieme illimitato ed* $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *una funzione a valori reali. Dato* $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, sono equivaleni:*

(i) $\displaystyle \liminf_{\substack{|X| \to +\infty \\ X \in \Omega}} F(X) = \ell$;

(ii) $\displaystyle \liminf_{R \to +\infty} \Big\{ \inf_{\Omega \cap \partial B_R} F \Big\} = \ell$.

Esercizio 5. *In ciascuno dei casi seguenti determinare*

$$\limsup_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y) \qquad e \qquad \liminf_{\substack{|(x,y)| \to +\infty \\ (x,y) \in \Omega}} F(x,y).$$

(1) $F(x,y) = \dfrac{x^2 + y^2 - xy}{x^2 + y^2 + 1}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0\}$;

(2) $F(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0\}$;

(3) $F(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y \geq 0\}$;

(4) $F(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{1 + x^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 2y\}$;

(5) $F(x,y) = \dfrac{xy}{1 + x^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < 2y < x < 3y\}$;

(6) $F(x,y) = \dfrac{e^{x+y}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 2y\}$;

(7) $F(x,y) = \dfrac{e^{y-x}}{x^2 + y^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 < y < x < 2y\}$;

(8) $F(x,y) = \dfrac{y}{y^2 - x^2 + 1}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ |x| < y\}$;

(9) $F(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x + y > 1\}$;

(10) $F(x,y) = \dfrac{x^2 + y}{y^2 + x}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0\}$;

(11) $F(x,y) = \dfrac{x + 2y}{y + 2x}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 1, \ y \geq 2\}$;

(12) $F(x,y) = \dfrac{2y - x^2}{x + y}$; $\quad \Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y \geq x^2\}$.